

2017
APPLIED MATHEMATICS

निर्धारित समय : तीन घंटे]

Time allowed : Three Hours]

[अधिकतम अंक : 70

[Maximum Marks : 70

नोट : (i) प्रथम प्रश्न अनिवार्य है, शेष में से किन्हीं पाँच के उत्तर दीजिये ।

Note : Question No. 1 is compulsory, answer any FIVE questions from the remaining.

(ii) प्रत्येक प्रश्न के सभी भागों को क्रमवार एक साथ हल कीजिये ।
Solve all parts of a question consecutively together.

(iii) प्रत्येक प्रश्न को नये पृष्ठ से प्रारम्भ कीजिये ।
Start each question on fresh page.

(iv) दोनों भाषाओं में अन्तर होने की स्थिति में अंग्रेजी अनुवाद ही मान्य है ।
Only English version is valid in case of difference in both the languages.

1. (i) वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ के केन्द्र व त्रिज्या ज्ञात कीजिये ।

Find the centre and radius of the circle $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

(ii) हल कीजिये : $\frac{dy}{dx} = e^x - y + x^2 e^{-y}$

Solve : $\frac{dy}{dx} = e^x - y + x^2 e^{-y}$

(iii) समिश्र संख्या $1 - \sqrt{3} i$ का मापांक एवं कोणांक ज्ञात कीजिये ।

Find the modulus and argument of the complex number $1 - \sqrt{3} i$.

(iv) 8 व्यक्ति एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं ?

In how many ways 8 persons seated around a round table ?

(v) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

(2×5)

2. (i) सिद्ध कीजिये कि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में मध्य पद $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n} \cdot 2^n x^n$ है।

Prove that the middle term in the expansion of

$$(1+x)^{2n} \text{ is } \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n} \cdot 2^n x^n.$$

- (ii) सिद्ध कीजिये : $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{16}$

Prove that : $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{16}$

(6+6)

3. (i) यदि फलन $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ k-2x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$x = 1$ पर सतत हो तो k का मान ज्ञात कीजिये।

if the function $f(x)$ is continuous at $x = 1$, then find the value of k

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ k-2x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

- (ii) क्रमर नियम से निम्न रेखिक समीकरण निकाय को हल कीजिये :

Solve the following system of linear equation by using Cramer's Rule :

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$2x + 4y + z = 7$$

$$3x + 2y + 9z = 14$$

(6+6)

4. (i) सिद्ध कीजिये :

Prove that :

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

- (ii) उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये, जो बिन्दु $(3, 4)$ से होकर जाती है तथा रेखा $2x + 3y + 7 = 0$ पर लम्बवत् है।

Find the equation of a line passing through $(3, 4)$ and perpendicular to the line $2x + 3y + 7 = 0$.

(6+6)

5. (i) यदि $x^y = e^{x-y}$ तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(1 + \log_e x)^2}$$

If $x^y = e^{x-y}$ then prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(1 + \log_e x)^2}$$

(6)

- (ii) सिद्ध कीजिये कि दी गई तिरछी (तिर्यक) ऊँचाई और अधिकतम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ है।

Show that the semi-vertical angle of a cone of maximum volume and given slant height is $\tan^{-1}(\sqrt{2})$. (6)

6. निम्न समाकलन हल कीजिये :

Solve the following integrals :

(i) $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(ii) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$

(6+6)

7. निम्न अवकल समीकरण हल कीजिये :

Solve the following differential equations :

(i) $x \log_e x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log_e x$

(ii) $\frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^{-2x}$

(6+6)

8. (i) मान ज्ञात कीजिये :

Find the value :

$$\int_0^{\pi/4} \log_e (1 + \tan x) dx$$

- (ii) बिन्दु $(0, 1, 2)$ से होकर जाने वाले बल $2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ का बिन्दु $(1, -2, 0)$ के सापेक्ष आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

A force $2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ is passing through point $(0, 1, 2)$. Find the moment of force w.r.t. the point $(1, -2, 0)$

(6+6)