

2015

APPLIED MATHEMATICS

निर्धारित समय : तीन घंटे]

Time allowed : Three Hours]

[अधिकतम अंक : 70

[Maximum Marks : 70

नोट : (i) प्रथम प्रश्न अनिवार्य है, शेष में से किन्हीं पाँच के उत्तर दीजिये ।

Note : Question No. 1 is compulsory, answer any five questions from the remaining.

(ii) प्रत्येक प्रश्न के सभी भागों को क्रमवार एक साथ हल कीजिए ।
Solve all parts of a question consecutively together.

(iii) प्रत्येक प्रश्न को नये पृष्ठ से प्रारम्भ कीजिए ।
Start each question on a fresh page.

(iv) दोनों भाषाओं में अन्तर होने की स्थिति में अंग्रेजी अनुवाद ही मान्य है ।
Only English version is valid in case of difference in both the languages.

1. (i) समिश्र संख्या $(1; -i)$ का कोणांक ज्ञात कीजिये ।

Find the argument of the complex number $(1; -i)$.

(ii) यदि $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \dots \infty}}}$, तो सिद्ध कीजिये कि $(2y - 1) \frac{dy}{dx} = \cos x$.

If $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \dots \infty}}}$, then prove that $(2y - 1) \frac{dy}{dx} = \cos x$.

(iii) हल कीजिये : $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^y$

Solve : $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^y$

(iv) वृत्त $x^2 + y^2 = 12x$ के केन्द्र के निर्देशांक एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिये ।

Find the centre and radius of the circle whose equation is given by $x^2 + y^2 = 12x$.

(v) 10 फूलों में से 4 फूल भगवान को चढ़ाने के लिए कितने प्रकार से चुने जा सकते हैं ?

Out of 10 flowers, in how many ways 4 flowers can be selected for the worshipping of the God ?
(2×5)

P.T.O.

2. (i) यदि $\tan(\pi \cos \theta) = \cot(\pi \sin \theta)$, तो सिद्ध कीजिये कि : $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$

If $\tan(\pi \cos \theta) = \cot(\pi \sin \theta)$, then prove that : $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

- (ii) यदि $f(x) = \begin{cases} x^2; & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$, $x = 1$ पर अवकलनीय हो, तो a और b के मान ज्ञात कीजिये।

If $f(x) = \begin{cases} x^2; & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$ is differentiable at $x = 1$, then find the value of a and b . (6+6)

3. (i) उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दु $(4, 5)$ से होकर जाती है, तथा सरल रेखा $2x - 3y - 5 = 0$ के समान्तर है।

Find the equation of a line passing through the points $(4, 5)$ and parallel to the line $2x - 3y - 5 = 0$.

- (ii) सिद्ध कीजिये कि सरल रेखा $lx + my + n = 0$ परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करेगी, यदि $ln = am^2$ ।

Prove that the line $lx + my + n = 0$ touches the parabola $y^2 = 4ax$, if $ln = am^2$. (6+6)

4. (i) फलन $y = x^{\log x} + (\sin x)^x$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिये।

Differentiate $y = x^{\log x} + (\sin x)^x$ with respect to x .

- (ii) एक खिड़की आयत पर ऊपर अर्धवृत्त बनाकर बनाई गई है। यदि खिड़की का परिमाण P हो, तो इसका अधिकतम क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

A window is in the shape of a rectangle with a semi-circle covering the top. If the perimeter of the window be a fixed length P , find its maximum area. (6+6)

5. (i) सिद्ध कीजिए :

Prove that :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a).$$

- (ii) प्रतिलोम मैट्रिक्स का प्रयोग कर समीकरण निकाय को हल कीजिये :

Solve the system of equations using inverse matrix :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

(6+6)

6. निम्न समाकलन हल कीजिये :

Solve the following integrals :

(i) $\int x \tan x \sec^2 x \, dx$

(ii) $\int \frac{dx}{2x^2 + x - 1}$

(6+6)

7. निम्न अवकल समीकरण हल कीजिये :

Solve the following differential equation :

(i) $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$

(ii) $(D^2 + 7D + 12)y = e^{2x}$

(6+6)

8. (i) मान ज्ञात कीजिये :

Find the value :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

(ii) सदिश $4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $-2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ के लम्बवत् 9 इकाई परिमाण वाला सदिश ज्ञात कीजिये ।

Find a vector of magnitude 9, which is perpendicular to both the vectors

$4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ and $-2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$.

(6+6)